

## تحلیل جریان نشت از بدنه سدهای خاکی با استفاده از روش عددی تفاضل محدود و روش فشار گسترده

حجت احمدی<sup>۱\*</sup>، حسین سلیمی<sup>۲</sup> و محمد همتی<sup>۳</sup>

۱، ۲ و ۳- به ترتیب: دانشیار گروه مهندسی آب؛ دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی؛ و استادیار گروه مهندسی آب، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران  
تاریخ دریافت: ۹۵/۷/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۹۶/۵/۱۷

### چکیده

تحلیل جریان عبوری از بدنه سدهای خاکی پدیده‌ای مهم در تحلیل و طراحی سدهای خاکی است. در این تحقیق، با به کارگیری روشی عددی بر اساس تفاضل محدود موسوم به فشار گسترده، مقدار فشار آب منفذی ایجاد شده در بدنه سد تحلیل و بررسی شد. برای بررسی دقت روش ارائه شده، نتایج به دست آمده در حالت یک بعدی با حل تحلیلی معادله حاکم و در شرایط دو بعدی نتایج حل عددی با نتایج مطالعات و تحقیقات سایر محققان مقایسه شد. نتایج این تحقیق نیز بر مبنای داده‌های مشاهده‌ای و نتایج نرم افزار SEEP/W، نرم افزاری پر کاربرد در زمینه تحلیل نشت، بررسی شد. نتایج این بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش حل عددی پیشنهادی با دقت بسیار خوب می‌تواند موقعیت خط نشت را تخمین زند و توزیع فشار آب منفذی را در بدنه سد با دقت بسیار خوب تحلیل کند. همچنین، برای تعیین موقعیت سطح آب در بدنه سد، یک پارامتر بی بعد استخراج گردید.

### واژه‌های کلیدی

تفاضل محدود، سد خاکی، فشار گسترده

### مقدمه

نشت در بدنه سدهای خاکی، علاوه بر پیچیدگی‌های خاص مسئله، وابستگی زیادی به پارامترهای لازم و خصوصیات هیدرولیکی مصالح تشکیل دهنده بدنه سد خاکی دارد (Ahmadi et al., 2014). بورجا و کیشنانی (Borja & Kishnani, 1991) با ارائه یک تابع محدودیت، حل با مش‌بندی ثابت و با به کارگیری روش عددی اجزای محدود به بررسی موقعیت سطح آزاد نشت پرداختند. نتایج کار آنها نشان از همگرایی سریع‌تر روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم‌های قبلی دارد. باردت و توبیتا (Bardet & Tobita, 2002) با ارائه روشی کاربردی موسوم به فشار گسترده (EP) برای حل مسائل نشت سطح آزاد گام‌هایی برداشتند. این روش بر مبنای اصلاح رابطه داری

تحلیل نشت و حرکت آب در بدنه سدهای خاکی به‌طور گسترده مورد توجه محققان و مهندسان قرار گرفته است به‌طوری‌که نشت علاوه بر ارزیابی تلفات حاصل از آن و خطرهای مرتبط با آن، در تحلیل پایداری سازه نیز بسیار مهم است. از روش‌های مهم و پرکاربرد در تحلیل نشت، به کارگیری روش‌های مختلف عددی برای حل معادلات حاکم بر این پدیده است (Zheng et al., 2015). تحلیل نشت در بدنه سدهای خاکی، به دلیل نامشخص بودن محدوده مربوط به معادله حاکم یا به عبارتی هندسه‌ی حل همیشه مورد توجه محققان مختلف بوده است (Lacy & Prevost, 1987). تعیین موقعیت دقیق خط

و حل معادله جریان در محدوده محاسباتی استوار است. جی و همکاران (Ji *et al.*, 2005) با اعمال اصلاحاتی در روش فشار گسترده (EP)، دقت شبیه‌سازی را بهبود بخشیدند و میزان محاسبات را کاهش دادند. آنها با اصلاح تابع مربوط به موقعیت سطح نشت، میزان خطای روش فشار گسترده (EP) را به مقدار قابل توجه کاهش دادند. پیچر (Pitcher, 2005) به مطالعه‌ای پرداخت که موقعیت حد بالایی محدوده نشت (خط فریاتیکی) با استفاده از فرضیات دوپویی و بر مبنای یک حدس (فرض) اولیه به روش تکرار تعیین می‌شود و روش حل عددی بر اساس اجزای محدود با المان‌های مثلثی سه گرهی و شش گرهی است. مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج دیگر تحقیقات نشان از منطقی بودن این نتایج داشت. فو و جین (Fu & Jin, 2009) روشی عددی برای شبیه‌سازی جریان نشتی غیرماندگار از سد خاکی با دو متغیر درجه اشباع و هد آب برای تعیین محدوده نشت فرض کردند. آزمایش‌های جریان نشت غیرماندگار تحقیقات آنها نشان داد که دقت و اطمینان مدل برای مسائل جریان نشتی، مناسب و کافی است و می‌تواند برای جریان نشتی با شرایط پیچیده به کار گرفته شود. لشته‌نشایی و همکاران (Lashteh-Nashaei *et al.*, 2011) با ارائه مدلی عددی بر اساس روش حل اساسی، که یکی از روش‌های بدون شبکه است، برای تحلیل تراوش در سدهای خاکی اقدام نمودند؛ مقایسه مدل عددی که آنها ارائه داده‌اند با نتایج روش عددی المان محدود، دقت نتایج به دست آمده را تأیید می‌کند. همچنین ثابت شد که روش تعیین سطح نشت در استفاده‌های واقعی از طریق تعریف اشباع شدن طبیعی، روشی منطقی و کاربردی است. در کنار روش‌های عددی، محققان روش‌های تحلیلی مختلفی نیز برای تحلیل مسئله نشت ارائه داده‌اند؛ با این حال، این روش‌ها نسبت به روش‌های عددی انعطاف کمتری دارند (Kacimov & Obnosov, 2012). رزک و سنون

و حل معادله جریان در محدوده محاسباتی استوار است. جی و همکاران (Ji *et al.*, 2005) با اعمال اصلاحاتی در روش فشار گسترده (EP)، دقت شبیه‌سازی را بهبود بخشیدند و میزان محاسبات را کاهش دادند. آنها با اصلاح تابع مربوط به موقعیت سطح نشت، میزان خطای روش فشار گسترده (EP) را به مقدار قابل توجه کاهش دادند. پیچر (Pitcher, 2005) به مطالعه‌ای پرداخت که موقعیت حد بالایی محدوده نشت (خط فریاتیکی) با استفاده از فرضیات دوپویی و بر مبنای یک حدس (فرض) اولیه به روش تکرار تعیین می‌شود و روش حل عددی بر اساس اجزای محدود با المان‌های مثلثی سه گرهی و شش گرهی است. مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج دیگر تحقیقات نشان از منطقی بودن این نتایج داشت. فو و جین (Fu & Jin, 2009) روشی عددی برای شبیه‌سازی جریان نشتی غیرماندگار از سد خاکی با دو متغیر درجه اشباع و هد آب برای تعیین محدوده نشت فرض کردند. آزمایش‌های جریان نشت غیرماندگار تحقیقات آنها نشان داد که دقت و اطمینان مدل برای مسائل جریان نشتی، مناسب و کافی است و می‌تواند برای جریان نشتی با شرایط پیچیده به کار گرفته شود. لشته‌نشایی و همکاران (Lashteh-Nashaei *et al.*, 2011) با ارائه مدلی عددی بر اساس روش حل اساسی، که یکی از روش‌های بدون شبکه است، برای تحلیل تراوش در سدهای خاکی اقدام نمودند؛ مقایسه مدل عددی که آنها ارائه داده‌اند با نتایج روش عددی المان محدود، دقت نتایج به دست آمده را تأیید می‌کند. همچنین ثابت شد که روش تعیین سطح نشت در استفاده‌های واقعی از طریق تعریف اشباع شدن طبیعی، روشی منطقی و کاربردی است. در کنار روش‌های عددی، محققان روش‌های تحلیلی مختلفی نیز برای تحلیل مسئله نشت ارائه داده‌اند؛ با این حال، این روش‌ها نسبت به روش‌های عددی انعطاف کمتری دارند (Kacimov & Obnosov, 2012). رزک و سنون

بر مبنای تحقیق آزمایشگاهی (Rezak & Senoon, 2011) که قبلاً روی سد خاکی با هسته رسی تحقیق کرده بودند یک روش تحلیلی برای بررسی اثر نفوذپذیری نسبی هسته به پوسته ( $\frac{k_c}{k_s}$ ) روی دبی نسبی نشت و افت نسبی خط فریاتیکی به سبب وجود هسته ارائه کردند. یکی از مهمترین موانع در به‌کارگیری روش‌های عددی، پیچیدگی‌هایی است که در کاربرد این روش‌ها وجود دارد؛ این پیچیدگی‌ها در روش‌های مبتنی بر روش اجزای محدود، نسبت به روش‌های تفاضل محدود، بسیار قابل توجه است (Athani *et al.*, 2015).

در تحقیق حاضر بر پایه روش فشار گسترده (EP) و حل معادله حاصل از این روش در محیط برنامه‌نویسی Matlab، روش حل عددی برای انتخاب پارامترهای مورد نیاز بر اساس اندازه مش، تعریف یک تابع جدید و حل مسئله نشت در هندسه جدید بر اساس گسسته‌سازی معادلات حاکم برای هندسه سد خاکی با مقطع دوزنقه‌ای شکل بهینه‌سازی شد. همچنین، دقت این روش با مقایسه نتایج حاصل از بررسی یک مدل آزمایشگاهی از یک سد خاکی و داده‌های پیزومتریک مورد تحلیل واقع شد.

## مواد و روش‌ها

### توسعه مدل ریاضی

جریان دو بعدی آب در محیط‌های متخلخل از رابطه داری پیروی می‌کند؛ این رابطه در فرم ماتریسی به صورت رابطه ۱ بیان می‌شود:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ or } v = -K \text{grad}(h) \quad (1)$$

که در آن،  $k_x$  و  $k_y$  و  $k_{xy}$  = ضرایب ماتریس نفوذپذیری (k)؛  $h$  = بار کل (هد کل)؛ و  $v_x$  و  $v_y$  = مؤلفه‌های بردار سرعت (v).

تحلیل جریان نشت از بدنه سدهای خاکی با استفاده...

شرایط مرزی حاکم بر مسئله سطح آزاد نشت در فاصله قائم (y) از سطح مبنا شکل ۱ به صورت روابط ۵ تا ۱۱ است:

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ and } p \geq 0 \text{ in } \Omega_w \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = -k \cdot \text{grad}(p + y) \quad (6)$$

$$p = 0 \text{ in } \Omega_d \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p &= h_{AB} - y \text{ on } AB \text{ and} \\ p &= h_{CD} - y \text{ on } CD \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ on } BC \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ and } p = 0 \text{ on } AE \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \leq 0 \text{ and } p = 0 \text{ on } DE \quad (11)$$

در این مطالعه، جهت‌های ناهمسانی موازی جهت‌های محوره‌های x و y در نظر گرفته شد؛ یعنی  $k_{xy} = 0$  در حالت جریان پایدار، بقای جرم رابطه دیفرانسیلی ۲ حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{or } \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

که می‌توان آن را به صورت رابطه ۳ نیز بیان کرد:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (3)$$

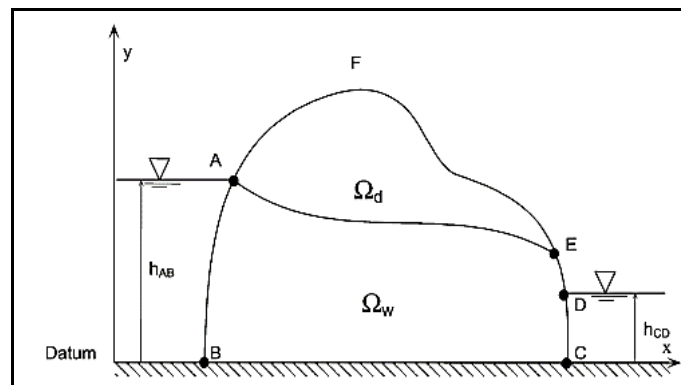
که در آن،  $S =$  یک خط (ناحیه) بسته؛ و  $n =$  بردار یکنه نرمال به  $S$ . ترکیب روابط ۱ و ۳، معادله دیفرانسیل جزئی زیر را به دست خواهد داد (رابطه ۴):

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

### معادلات نشت غیرمحصور

مسئله نشت با سطح آزاد را می‌توان در قالب شکل ۱ تعریف کرد. محدوده اشباع ( $\Omega_w$ ) بین نقاط ABCDE قرار دارد و محدوده غیراشباع ( $\Omega_d$ ) بالای سطح آزاد AE قرار دارد که دارای موقعیت نامعلومی است (شکل ۱). رابطه و

که در آن،  $p =$  بار فشاری (پیزومتری)؛  $n =$  بردار یکنه نرمال بر مرز؛  $h_{AB}$  و  $h_{CD} =$  به ترتیب عمق آب در وجه بالادست و پایین دست.



شکل ۱- شکل عمومی مسئله نشت با سطح آزاد (Bardet & Tobita, 2002)

$$H_\varepsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \geq \varepsilon \\ p/\varepsilon & \text{if } p < \varepsilon \end{cases} \quad (16)$$

که در آن،

$\varepsilon$  یک مقدار ثابت عددی است به طوری که اگر  $\varepsilon$  به سمت صفر میل کند،  $H_\varepsilon$  به  $H$  تبدیل خواهد شد.

معادلات تفاضل محدود برای نشت غیرمحصور

همان طور که قبلاً ذکر گردید، معادله حاکم بر نشت پایدار در محیط‌های متخلخل از جمله سدهای خاکی به صورت رابطه ۱۷ است:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

اگر این رابطه با توجه به رابطه اصلاح شده داری (رابطه ۱۲) نوشته شود، نتیجه به صورت رابطه ۱۸ خواهد شد.

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \\ k_y \frac{\partial}{\partial y} (H(P)) = 0 \rightarrow \\ k_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial(H(P))}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

با به کارگیری تقریب تفاضل مرکزی، رابطه ۱۸ به صورت زیر بسط پیدا می‌کند (رابطه ۱۹). با ضرب کردن عبارت‌ها در  $\Delta y$ ، تقسیم آنها بر  $k_x$  و بازآرایی جملات، رابطه ۲۰ نتیجه می‌شود:

$$k_x \frac{P_{1+1,j} - 2P_{1,j} + P_{1-1,j}}{(\Delta x)^2} + k_y \frac{P_{1,j+1} - 2P_{1,j} + P_{1,j-1}}{(\Delta y)^2} + k_y \left( \frac{H\left(\frac{P_{1,j} + P_{1,j-1}}{2}\right) - H\left(\frac{P_{1,j} + P_{1,j+1}}{2}\right)}{\Delta y} \right) = 0 \quad (19)$$

در حل مسائل نشت با سطح آزاد، به جای بار کل (h) بهتر است از بار فشاری (p) استفاده شود. بار فشاری برابر نسبت فشار آب ( $u_w$ ) به وزن مخصوص آب ( $\gamma_w$ ) است ( $p = \frac{u_w}{\gamma_w}$ ). در روش فشار گسترده (EP)، رابطه داری ارائه شده در رابطه ۱ به صورت رابطه ۱۲ قابل تعمیم است:

$$v' = -K[\text{grad}(p) + H(p)\text{grad}(y)] \quad (12)$$

که در آن،

$v'$  = سرعت اصلاح شده نشت؛ و  $H(p)$  = تابع هویساید (تابع یکه) است که به صورت رابطه ۱۳ تعریف می‌شود:

$$H(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \geq 0 \\ 0 & \text{if } p < 0 \end{cases} \quad (13)$$

هنگامی که  $p$  مثبت است، رابطه ۱۲ به رابطه ۱ تبدیل می‌شود. در چارچوب روش فشار گسترده (EP)، مرز جدید مسئله از روابط ۹، ۱۲، ۱۴ و ۱۵ پیروی می‌کند.

$$p = 0 \text{ on DEFA} \quad (14)$$

$$\text{div}(v') = 0 \text{ in } (\Omega_w \cup \Omega_d) \quad (15)$$

برای اهداف محاسباتی، تابع خیز  $H_\varepsilon$  با تابع هویساید (H) جایگزین گردید (رابطه ۱۶):

تحلیل جریان نشت از بدنه سدهای خاکی با استفاده...

$$P_{i,j}^{m+1} = \frac{1}{2\left(\frac{k_y}{k_x} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} \left[ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 (P_{i+1,j}^m + P_{i-1,j}^m) + \frac{k_y}{k_x} (P_{i,j+1}^m + P_{i,j-1}^m) + \frac{k_y}{k_x} \Delta y \left( H \left( \frac{P_{i,j}^m + P_{i,j-1}^m}{2} \right) - H \left( \frac{P_{i,j}^m + P_{i,j+1}^m}{2} \right) \right) \right] \quad (20)$$

به شرایط مرزی و مکانی به صورت زیر بیان می‌شود (رابطه ۲۱). در رابطه ۲۱،  $\omega$  فاکتور تخفیف است و رابطه برای لایه غیرقابل نفوذ کف به صورت رابطه ۲۲ خواهد بود.

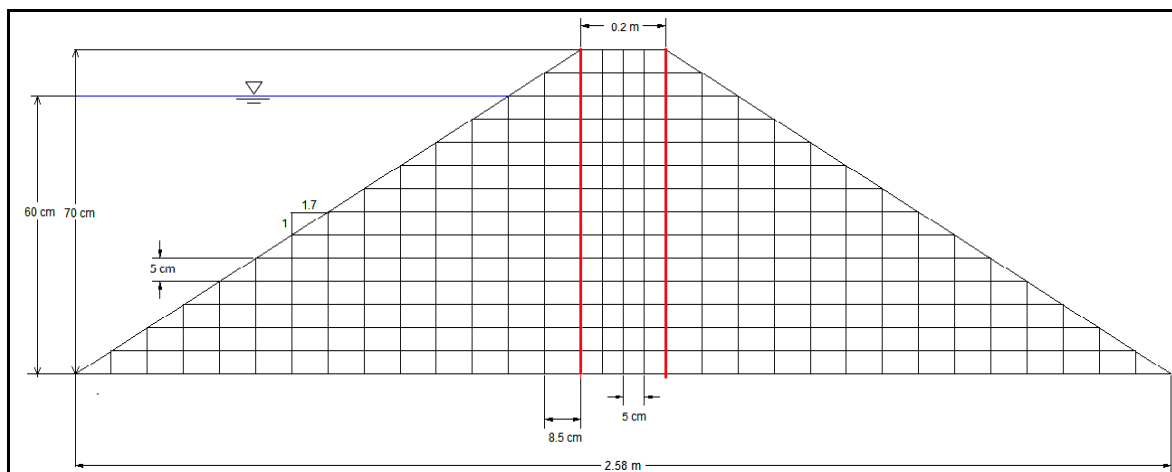
برای حل دستگاه معادلات حاصل از روش تفاضل محدود بیان شده، از روش تخفیف تکراری (SOR) استفاده شد. طبق این روش، معادلات حاصل برای گره‌های مختلف از نظر موقعیت قرارگیری نسبت

$$P_{i,j}^{m+1} = (1 - \omega)P_{i,j}^m + \frac{\omega}{2\left(\frac{k_y}{k_x} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} \left[ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 (P_{i+1,j}^m + P_{i-1,j}^m) + \frac{k_y}{k_x} (P_{i,j+1}^m + P_{i,j-1}^m) + \frac{k_y}{k_x} \Delta y \left( H \left( \frac{P_{i,j}^m + P_{i,j-1}^m}{2} \right) - H \left( \frac{P_{i,j}^m + P_{i,j+1}^m}{2} \right) \right) \right] \quad (21)$$

$$P_{i,j}^{m+1} = (1 - \omega)P_{i,j}^m + \frac{\omega}{2\left(\frac{k_y}{k_x} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} \left[ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 (P_{i+1,j}^m + P_{i-1,j}^m) + 2\frac{k_y}{k_x} P_{i,j-1}^m + 2\frac{k_y}{k_x} \Delta y \right] \quad (22)$$

بسیار موثر باشد. در این شرایط، مطابق شکل ۲، سد به قسمت‌های مختلف تقسیم خواهد شد و روابط ۲۱ و ۲۲ برای هر بخش قابل کاربرد خواهد بود؛ با این حال برای مرز مشترک شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف، معادلات تفاضل محدود باید اصلاح شود.

در سدهای خاکی ناهمگن، نفوذپذیری هسته بسیار کمتر از نفوذپذیری پوسته‌ها است و از این رو تغییرات هدایت بار هیدرولیکی در بخش هسته بیشتر از سایر قسمت‌ها خواهد بود؛ در این شرایط، استفاده از شبکه ریزتر در بخش میانی سد می‌تواند در حصول نتایج دقیق



شکل ۲- قلمرو محاسباتی (بدون مقیاس) در سد خاکی و شبکه‌بندی غیر هم‌اندازه

نامساوی کاربرد خواهد داشت. روش حل SOR معادله حاکم بر جریان نشت غیر محصور به صورت زیر است:

با توجه به شکل ۲، برای حد فواصل قسمت میانی و شیب‌دار (نواحی قرمز رنگ) تفاضلات محدود با گام‌های

$$P_{i,j}^{m+1} = (1 - \omega) P_{i,j}^m + \frac{\omega}{2 \left( \frac{k_y}{k_x} + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right)} \left[ \frac{2}{(\alpha + 1)} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \left( \frac{1}{\alpha} P_{i+1,j}^m + P_{i-1,j}^m \right) + \frac{k_y}{k_x} (P_{i,j+1}^m + P_{i,j-1}^m) + \frac{k_y}{k_x} \Delta y \left( H \left( \frac{P_{i,j}^m + P_{i,j-1}^m}{2} \right) - H \left( \frac{P_{i,j}^m + P_{i,j+1}^m}{2} \right) \right) \right] \quad (23)$$

هم چنین برای لایه کف غیرقابل نفوذ:

$$P_{i,j}^{m+1} = (1 - \omega) P_{i,j}^m + \frac{\omega}{2 \left( \frac{k_y}{k_x} + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right)} \left[ \frac{2}{(\alpha + 1)} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \left( \frac{1}{\alpha} P_{i+1,j}^m + P_{i-1,j}^m \right) + \frac{k_y}{k_x} (2P_{i,j-1}^m) + \frac{k_y}{k_x} 2\Delta y \right] \quad (24)$$

۳ شمای کلی مدل ساخته شده را نشان می‌دهد. برای بررسی فشار آب منفذی در بدنه سد، از ۸۰ پیژومتر در سه ردیف با شماره گذاری از پایین به بالا در ترازهای ۵، ۱۵ و ۳۰ سانتی متر از کف پی نفوذناپذیر و در فواصل افقی مختلف ۵ و ۱۰ سانتی متری از هم استفاده شد. شکل ۳ تصویری از مدل آزمایشگاهی به همراه موقعیت پیژومترهای نصب شده روی بدنه آن را نشان می‌دهد. در این مطالعه از داده‌های پیژومترهای تراز ۵ سانتی متری استفاده و به‌ازای تراز آب مخزن ۶۰ سانتی متری نتایج مدل با داده‌های حاصل از روش عددی مقایسه شد. با توجه به آزمایش‌های بار ثابت روی مصالح تهیه شده از بدنه مدل پس از اتمام آزمایش‌ها و همچنین کالیبراسیون نرم‌افزار SEEP/W بر اساس مقایسه مقدار نشت مشاهده‌ای و مدل، هدایت هیدرولیکی افقی بدنه سد برابر ۵/۷ سانتی متر بر ساعت حاصل شد. علاوه بر این، با توجه به بررسی‌های آزمایشگاهی در خصوص مصالح به کار رفته در ساخت مدل و همچنین شبیه‌سازی‌های صورت گرفته با مدل اجزای محدود SEEP/W شرایطی محیطی در دو حالت همروند و ناهمروند، نسبت هدایت هیدرولیکی قائم به افقی برابر با ۰/۷ برای مصالح بدنه سد آزمایشگاهی لحاظ شد.

روابط ۲۳ و ۲۴ برای حد فاصل وجه شیب‌دار بالادست و قسمت میانی سد خاکی هستند. برای حد فاصل قسمت میانی و وجه شیب‌دار پایین دست کافی است که در روابط فوق به جای  $\alpha = 1/\alpha$  قرار داده شود. در این رابطه،  $\alpha$  نسبت شبکه در جهت افقی ( $\Delta x$ ) در دو شبکه غیر هم اندازه است. برای کاربرد روش پیشنهادی، کدهایی در محیط نرم‌افزار متلب برای حل مسئله نشت نوشته شد.

یادآوری می‌شود که شبکه‌بندی استفاده شده برای تحلیل جریان در مدل آزمایشگاهی سد خاکی در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، برای بخش میانی از بدنه سد اندازه شبکه‌های انتخاب شده به شکل مربع ۵×۵ و برای بخش پوسته بالادست و پایین دست شبکه مستطیلی ۵×۸/۵ سانتی متر در نظر گرفته شد.

#### مدل آزمایشگاهی

به منظور ارزیابی دقت روش EP در تحلیل پدیده نشت در بدنه سدهای خاکی، مدل آزمایشگاهی یک سد خاکی همگن به ارتفاع ۷۰ سانتی متر به شکل متقارن نسبت به محور سد و شیب بدنه ۱:۱/۷ ساخته شد. شکل

تحلیل جریان نشت از بدنه سدهای خاکی با استفاده...



شکل ۳- تصویر مدل آزمایشگاهی سد خاکی و پیژومترهای نصب شده در بدنه مدل (عکس از پایین دست)

### نتایج و بحث

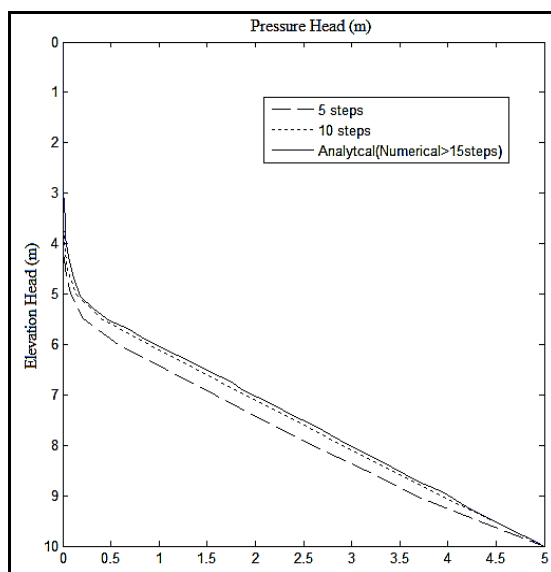
#### صحت سنجی مدل

به منظور بررسی صحت مدل الگوریتم به کار رفته در روش EP و همچنین کدهای نوشته شده، مسئله‌های مختلف نشت شامل هندسه‌های ساده مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت و نتایج با نتیجه تحقیقات سایر محققان و روش‌های حل تحلیلی مقایسه شد که در زیر به تفصیل ارائه می‌شود.

#### حالت یک بعدی

برای بررسی دقت و صحت کارکرد روش حل عددی

برای حالت یک بعدی، روش عددی در برابر تحلیل فشار در ستونی از محیط متخلخل تحلیل شد. در این حالت، طبق تحقیقات قبلی صورت گرفته در ستون خاکی با ارتفاع ۱۰ متر، سطح آب در تراز ۵ متری در نظر گرفته شد. بدین ترتیب شرایط مرزی به صورت فشار پیژومتری در کف ستون برابر با ۵ و در سطح فوقانی لایه برابر با صفر انتخاب شد و طبق قوانین هیدرواستاتیک، توزیع فشار آب در بین این دو نقطه خطی است. فاصله گره‌ها برای این حالت برابر با نیم متر لحاظ شد. نتیجه این حل در شکل ۴ ارائه شده است. در این شکل، جهت محور قائم از بالا به پایین در نظر گرفته شد.



شکل ۴- تغییر پذیری توزیع بار فشاری p نسبت به تعداد تکرار و حل تحلیلی در مورد مثال ستون آب تک بعدی

غیرقابل نفوذ برابر  $0/3$ ، همچنین اختلاف بار فشاری بین دو تکرار متوالی<sup>۱</sup> برابر  $0/0001$  در نظر گرفته شده است. برای این مسئله شبکه‌بندی مربعی و  $\Delta y = \Delta x = 0.5m$  است، و نیز مقدار فاکتور تخفیف ( $\omega$ ) برابر  $1/2$  لحاظ شده است. همچنین مقدار پارامتر  $\epsilon$  برابر  $\Delta y$  در نظر گرفته شد؛ به‌طوری‌که در این مسئله  $\epsilon = 0.5$  انتخاب شد. همان‌طور که در شکل ۵ مشخص است، خط نشت به‌دست آمده دارای دقت خوبی است و انطباق خوبی با کارهای قبلی دارد. مقادیر همگرا شده به‌ازای تعداد تکرار ۱۳۵ به‌دست آمد. مقایسه نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده از تحقیقات سایر محققان درباره همین مسئله نشان از دقت مناسب دارد. نتیجه این تحلیل، به‌علت تشابه در چهارچوب اصلی روش، بیشترین تشابه را با نتایج تحقیقات باردت و توبیتا (Bardet & Tobita, 2002) دارد؛ به‌طوری‌که سطح نشت در وجه پایین‌دست در این دو روش کاملاً مشابه هم است در عین حال در نیمه بالادست از محیط متخلخل، سطح فریاتیگ حاصل از این تحقیق کمی پایین‌تر از نتیجه کار آنها و همچنین نتیجه کار محققان دیگر است. به‌دلیل فقدان حل تحلیلی برای این مسئله و همچنین داده مشاهده‌ای نمی‌توان روی مقدار دقت روش به‌صورت کمی قضاوت کرد. با این حال، با توجه به اینکه نتایج کار محققان قبلی که در این تحقیق استفاده شده، قبلاً مورد تأیید قرار گرفته است، نتیجه این تحقیق نیز قابل پذیرش خواهد بود. البته، به‌علت تشابه در چهارچوب اصلی روش، با کار باردت و توبیتا (Bardet & Tobita, 2002) بیشترین تطابق را داراست. نکته دیگر اینکه چون فقط در روش بورجا و کیشنانی (Borja & Kishnani, 1991) فرضیات دوپویی استفاده شده، خط فریاتیگ محدود به دو تراز بالادست و پایین‌دست شده است.

برابر محاسبات، در صورت کارکرد صحیح روش عددی، سطح آب باید در وسط ستون خاک قرار بگیرد. با توجه به شکل ۴، روش عددی EP یک شیب همواری از بار فشاری بین محیط تر و خشک را نشان می‌دهد، در حالی‌که حل فیزیکی دارای یک شیب گسسته در تراز ۵ است. از این‌رو، روش EP موقعیت سطح آزاد را به‌صورت دقیق نشان نمی‌دهد و موقعیتی تخمینی از طریق مقایسه حل تحلیلی و عددی می‌دهد. با این حال، با توجه به نتیجه حل تحلیلی و انطباق روش حل عددی بعد از ۱۵ تکرار روی آن می‌توان این روش را روش مناسبی ارزیابی کرد. نتیجه قابل تأمل حاصل از این تحلیل این است که با توجه به انطباق حل عددی و تحلیلی بر هم، موقعیت سطح آب در فشاری برابر با  $p_w = \epsilon/e$  قرار می‌گیرد (e عدد نپر است). این موضوع قبلاً با حل تحلیلی معادله یک‌بعدی نشت اثبات شده است (Bardet & Tobita, 2002; Ji et al., 2005)؛ این یافته در تعیین موقعیت سطح نشت در جریان دو بعدی استفاده شده است.

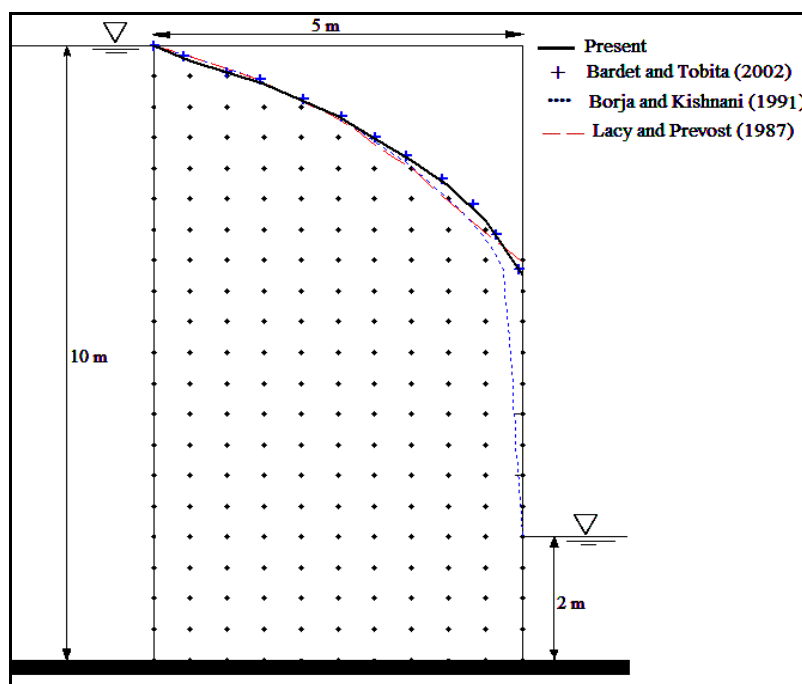
### حالت دو بعدی

برای ارزیابی کارایی روش حل عددی در حالت دو بعدی، حالت‌های مختلفی شامل هندسه‌هایی ایده‌آل از سدهای خاکی تحلیل و بررسی شدند و روش EP با روش‌های مختلف و نتایج محققان دیگر مقایسه و ارزیابی شد. این نتایج با توجه به هندسه‌های مختلف بررسی شده ارائه شده است.

### سد مستطیلی با آب در دو طرف

مقادیر اولیه برای شروع فرآیند محاسبات تکراری در گره‌های میانی برابر صفر و در گره‌های واقع بر لایه





شکل ۵- سد مستطیلی با آب در دو سمت آن

تقریباً یکسان است به طوری که سطح نشت در وجه پایین- دست و نیز سطح فریاتیک بر هم منطبق شده‌اند.

#### سد با وجه بالادست قائم و پایین دست شیب‌دار

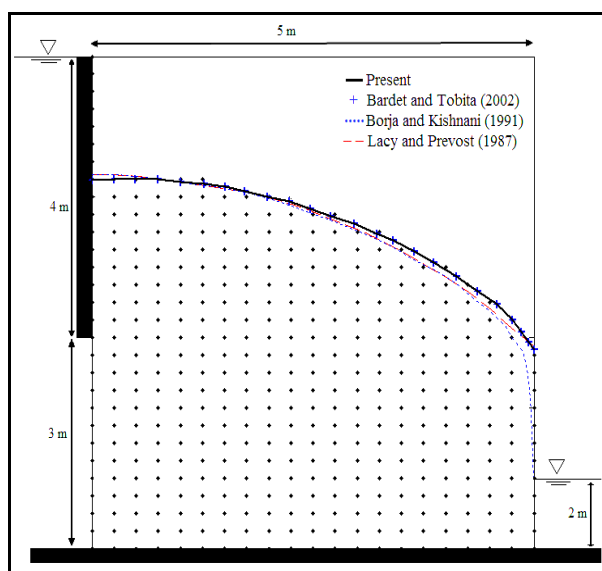
شکل ۷، هندسه سد با وجه شیب‌دار پایین دست مطالعه شده را نشان می‌دهد. برای تحلیل نشت در این هندسه، اندازه شبکه‌بندی مربعی ( $\Delta y = \Delta x = 0.25 \text{ m}$ ) بوده و  $\varepsilon = 0.25 \text{ m}$  و  $\omega = 1.2$  است. مقادیر اولیه فشار برابر صفر و  $0.15$  متر آب به ترتیب برای گره‌های میانی و کف است. شکل ۷ وضعیت سطح آزاد نشت و همگرا شده بار فشاری در سد با وجه پایین دست شیب‌دار را بیان می‌دارد. به این ترتیب که سطح نشت به دست آمده دارای دقت خوبی است و انطباق خوبی با نتایج تحقیقات سایر محققان دارد. همچنین، در این هندسه سد خاکی از روش حل تحلیلی کاساگرانده و کاساگرانده اصلاح شده و با در نظر گرفتن  $w > 30^\circ$  (شیب وجه پایین دست) استفاده شده است، همان طور که در شکل ۷ مشهود است، روش

#### سد مستطیلی با دیوار صفحه‌ای نفوذناپذیر

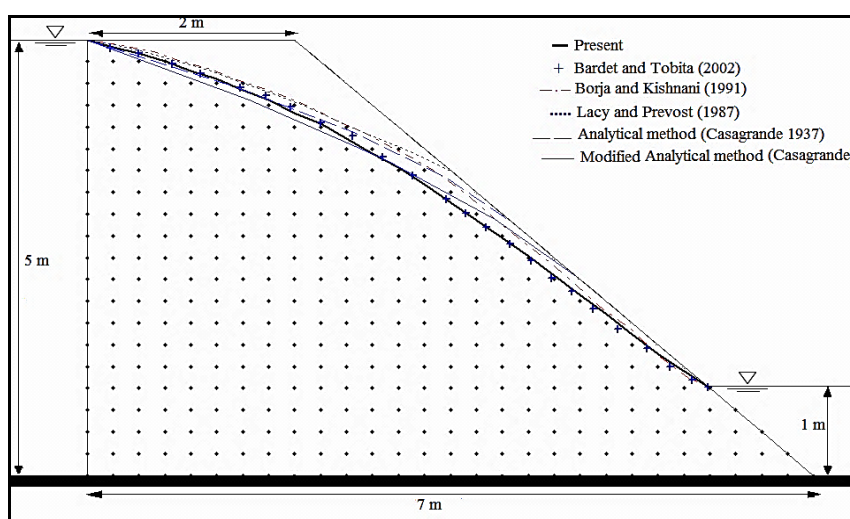
مسئله دو بعدی دیگری که بررسی شد، شامل هندسه یک سد مستطیلی با دیوار صفحه‌ای نفوذناپذیر در وجه بالادست است، که در شکل ۶ نشان داده شده است. فرآیند حل به ازای مقادیر اولیه صفر برای گره‌های میانی و  $0.15$  برای گره‌های روی لایه نفوذناپذیر کف و با دقت  $0.001$  آغاز شد. برای گره‌های میانی از رابطه ۲۲، گره‌های واقع بر لایه کف نفوذناپذیر از رابطه ۲۱ و گره‌های روی دیوار قائم نفوذناپذیر از رابطه ۲۲ و با اعمال شرایط آینه‌ای برای گره‌های افقی استفاده شد. شبکه‌بندی مشابه مسائل قبلی مربعی است با این تفاوت که اندازه شبکه ریزتر شده است ( $\Delta y = \Delta x = 0.25 \text{ m}$  و  $\varepsilon = 0.25 \text{ m}$ ). همچنین پارامتر فاکتور تخفیف ( $\omega$ ) برابر  $1/2$  لحاظ شد. با توجه به شکل ۶، بیشترین انطباق نتیجه این تحقیق مشابه نتایج تحقیقات باردت و توبیتا (Bardet & Tobita, 2002) است؛ با این حال، در این مسئله خاص انطباق نتیجه تحقیق با نتایج تحقیقات این محققان بسیار بیشتر و

به نظر می‌رسد که در این شرایط نتیجه روش پیشنهادی اندکی با واقعیت اختلاف دارد که جهت بررسی دقیق این اختلاف، نیاز به بررسی‌های بیشتر کارایی روش در مسائلی با زوایای مختلف شیب پایین‌دست دارد. همچنین، با نتایج تحقیقات لیزی و پروست (Lacy & Prevost, 1987) نیز نزدیکی خوبی دارد و همانند حالت قبل، در وجه پایین دست، اختلاف آن با نتایج برجا و کیشنانی (Borja & Kishnani, 1991) زیاد است.

در مقایسه با روش‌های عددی دیگر محققان، دارای دقت قابل قبولی نسبت به حل تحلیلی کاساگرانده اصلاح شده است. نکته قابل بیان در خصوص نتیجه این بخش این است که خط فریاتیک حاصل در این مسئله، مشابه با نتایج تحقیقات باردت و توبیتا (Bardet & Tobita, 2002)، بدون برخورد به وجه پایین دست به سطح آب در پایین دست رسیده است در حالی که در چهار روش دیگر اشاره شده سطح نشت در پایین دست سد وجود دارد و



شکل ۶- سد مستطیلی با دیوار صفحه‌ای نفوذناپذیر



شکل ۷- سد با وجه پایین دست شیب‌دار

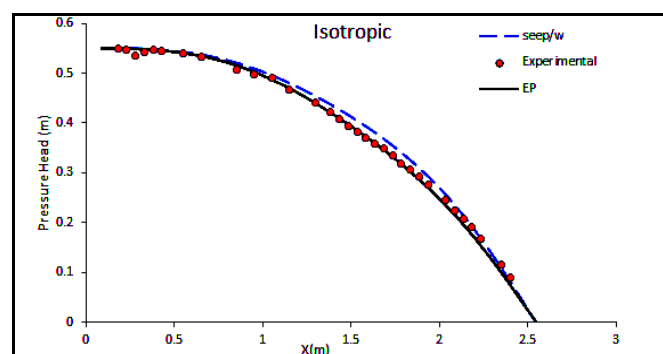
### سد خاکی مدل آزمایشگاهی

در تحقیقات قبلی عددی محققان مختلف، مسئله نشت از محیطی که دارای دو وجه شیبدار باشد تحلیل نشده است. در تحلیل‌های بارادت و توبیتا (Bardet & Tobita, 2002) نیز مقدار  $\varepsilon$  برابر  $\Delta y$  لحاظ شده و هیچ تحلیلی روی دقت مسئله در اثر تغییرات  $\varepsilon$  نشده است. در این بخش، با بررسی این موضوع سد خاکی همگن به صورت دو وجه شیبدار تحلیل و به منظور حصول نتیجه صحیح مقدار  $\varepsilon = \frac{\Delta y}{2}$  انتخاب شد و مدل آزمایشگاهی با پارامترهای زیر مورد تحلیل قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0.085 \text{ m}, & \alpha \Delta x &= 0.05 \text{ m} \\ A &= 5/8.5, & \beta &= \frac{1}{\alpha} = 1.7, \\ \Delta y &= 0.05 \text{ m} \end{aligned}$$

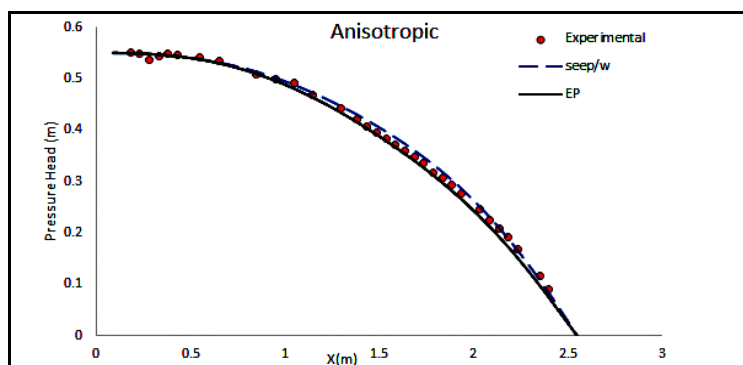
با تحلیل حساسیتی که در ازای انتخاب مقدار فاکتور تخفیف ( $\omega$ ) در این مدل صورت گرفت، این نتیجه حاصل شد که در صورت انتخاب  $\omega = 1.8$  کمترین تعداد تکرار و حداکثر سرعت همگرایی به دست می‌آید. با حل روابط ۲۱ تا ۲۴ برای قلمرو محاسباتی نشان داده شده در شکل ۲ و با در نظر گرفتن پارامترهای فوق و نفوذپذیری در دو حالت همروند و ناهمروند، نتایج به صورت شکل‌های ۸ و ۹ به دست آمد. در این شکل‌ها، علاوه بر داده‌های مشاهده‌ای برای مسئله نشت مربوط به بار فشاری حاصل

در تراز ۵ سانتی‌متری از لایه نفوذناپذیر کف که از آزمایش‌های تحت تراز ثابت بالادست به دست آمده است، نتایج تحلیل با نرم‌افزار SEEP/W مبتنی بر روش اجزای محدود نیز به کار گرفته شده است (Krahn, 2004). همان‌طور که از شکل‌های ۸ و ۹ مشخص است، روش EP دارای دقت خوبی است و نسبت به مدل SEEP/W انطباق بهتری با داده‌های مشاهده‌ای دارد. این دقت در حالت نفوذپذیری همروند بیشتر مشهود است و به نظر می‌رسد با ناهمروند شدن از دقت این روش کمی کاسته می‌شود. جدول ۱، مقدار مجموع مربعات خطای روش عددی EP دو حالت محیط همروند و ناهمروند را نسبت به داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد. باید به این نکته توجه داشت که خصوصیات مصالح بدنه سد خاکی استفاده شده در تحلیل‌های عددی و همچنین در تحلیل مدل SEEP/W بر اساس نتایج کالیبراسیون مقدار نشت جمع‌آوری شده و پروفیل سطح آب در بدنه به کمک SEEP/W حاصل شده است؛ با این حال، نتیجه روش EP به داده‌های واقعی نزدیک‌تر است. نکته حائز اهمیت دیگر این است که تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی در این مدل برای نفوذپذیری همروند ۴۶ و برای نفوذپذیری ناهمروند ۳۹ است؛ این تعداد تکرارهای پایین در ازای بررسی مقادیر  $\omega$  و انتخاب مقدار بهینه حاصل آمده است.



شکل ۸- مقایسه نتایج نشت پایدار در روش EP با داده‌های بیژومتري آزمایشگاهی و نتایج مدل Seep/w

(نفوذپذیری همروند  $k_y/k_x = 1$ )،  $x$  = فاصله از پاشنه سد



شکل ۹- مقایسه نتایج نشست پایدار در روش EP با داده‌های پیزومتری آزمایشگاهی و نتایج مدل Seep/w

(نفوذپذیری ناهمروند  $k_y/k_x = 0.7$ )،  $x$  = فاصله از پاشنه سد

جدول ۱- دقت روش EP نسبت به نتایج داده‌های آزمایشگاهی

نفوذپذیری	RMSE
همروند	۰/۰۰۹۴
ناهمروند	۰/۰۱۴۳۵۶

خواهد بود (e عدد نپر است). موقعیت خط فریاتیك در بدنه در حالات مختلف از هندسه به خوبی تعیین گردید و دقت روش عددی به کار رفته از این نظر وابسته به هندسه مسئله نیست. در تحلیل‌های دو بعدی در حالاتی که شیب وجه پایین دست کمتر از ۹۰ درجه باشد (حالت مربوط به شکل ۷)، سطح نشست در وجه پایین دست تشکیل نمی‌شود. ولی برای سایر شرایط برای موقعیت سطح نشست نتایج دقیق و صحیح حاصل می‌شود. جهت بررسی صحت و دقت این موضوع نیاز به بررسی‌های بیشتری خواهد بود. در بررسی نشست از بدنه سدهای خاکی حداقل تکرار در  $\omega = 1.8$  و همچنین مقدار  $\varepsilon = \frac{\Delta y}{2}$  حاصل گردید.

بر اساس نتایج به دست آمده، روش EP برای حالت شبکه بندی نامنظم نتیجه بسیار قابل قبول ارائه کرد به طوری که طبق شکل ۲، اندازه شبکه‌های بخش میانی مدل ریزتر از اندازه شبکه مربوط به بدنه انتخاب شده بود.

### نتیجه گیری

از تحلیل‌های صورت گرفته، نتایج به دست آمده به صورت زیر قابل جمع بندی است. با توجه به تحلیل عددی یک بعدی، موقعیت سطح آب در فشاری برابر با  $p_w = \varepsilon/e$  قرار می‌گیرد. به عبارتی، مکان هندسی نقاطی که برابر با  $\varepsilon/e$  باشد موقعیت خط فریاتیك

### مراجع

- Ahmadi, H., Rezaee, H. and Zeinalzadeh, K. 2014. A laboratory study of the effect of the function of hydraulic conductance on modeling of seepage from earth dams. Iranian J. Soil Water Res. 45(3): 299-307. (in Persian)
- Athani, A., Shivamanth, C. H., Solanki, G. and Dodagoudar, R. 2015. Seepage and stability analysis of earth dam using finite element method. Aquat. Procedia. 4, 875-883.

- Bardet, J. P. and Tobita, T. 2002. A practical method for solving free-surface seepage problems. *Comput. Geotech.* 29(6): 451-475.
- Borja, R. I. and Kishnani, S. S. 1991. On the solution of elliptic free-boundary problems via newton's method. *Comput. Method Appl. M.* 88(3): 341-361.
- Fu, J. F. and Jin, Sh. 2009. A Study on unsteady seepage flow through dam. *J. Hydrodyn.* 21(4): 499-504.
- Ji, C. N., Wang, Y. Z. and Shi, Y. 2005. Application of modified EP method in steady seepage analysis. *Comput. Geotech.* 32(1): 27-35.
- Kacimov, A. and Obnosov, Y. 2012. Analytical solutions for seepage near material boundaries in dam cores: the davisson-kalinin problems revisited. *Appl. Math. Model.* 36(3): 1286-1301.
- Krahn, J. 2004. *Seepage Analysis Modeling with Seep/W: an Engineering Methodology.* Geoslope International Ltd. Calgary, Alberta, Canada.
- Lacy, S. J. and Prevost, J. H. 1987. Flow through porous media: a procedure for locating the free surface. *Int. J. Numer. Anal. Met.* 11(6): 585-601.
- Lashteh-Nashaei, M., Jamshidi-Chenari, R. and Madandoust, A. 2011. Determining the seepage free level by using the MFS method in earth dams. *Proceedings of the 10<sup>th</sup> Iranian Hydraulic Conference.* Nov. 8-10. Rasht, Iran. (in Persian)
- Pitcher, B. A. 2005. *Water seepage through a dam: a finite element approach.* AM466b final project. University of Western Ontario, USA.
- Rezak, M. and Senoon, A. 2011. Analytical solution of seepage through earth dam with an internal core. *Alex. Eng. J.* 50(1): 111-115.
- Zheng, H., Liu, F. and Li, C. H. Primal mixed solution to unconfined seepage flow in porous media with numerical manifold method. *Appl. Math. Model.* 39(2): 794-808.



## **Analysis of Seepage through Earth Dams by Using Finite Difference Numerical Method and Extended Pressure Technique**

**H. Ahmadi\* , H. Salimi and M. Hemmati**

\*Corresponding Author: Associate Professor of Water Engineering, Faculty of Agriculture, Urmia University, Urmia, Iran.  
Email: h.ahmadi@urmia.ac.ir

Received: 4 October 2016, Accepted: 8 August 2017

Analysis of flow passing through earth dam as an important problem is included in analysis and design of earth dams. In this research by using a numerical method based on finite difference; called extended pressure, location of the first seepage stream in earth dam as well as developed pore pressure in the dam body was investigated. In order to assess the accuracy of the applied method, results with analytical solution in one dimensional condition and in case of two dimensional conditions. The numerical results were compared with results obtained from earlier experimental data and other methods. Furthermore, the results obtained were compared with results of SEEP/W as popular software in seepage analysis. The results of this investigation confirmed that the presented method estimates the location of phreatic line and pore pressure distribution very well in earthen dam. Finally, a dimensionless parameter was presented for determination of exact height of water table.

**Key Words:** Earth Dam, Extended Pressure, Finite Difference